Primena algebre u sistemima kontrole robotske ruke

Dimitrije Rajčić
Regionalni centar za talente Beograd II
Mentor: Dr Branko Malešević, Katedra za primenjenu matematiku ETF-a, Beograd

1 Uvod

Mnogi matematički problemi se mogu predstaviti kao sistem polinomnih jednačina:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, ...x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, ...x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, x_3, ...x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

gde su $f_1, f_2, f_3, ...f_m$ polinomi sa n promenljivih iz skupa $\mathbb{C}$. Sada nam se problem svodi na rešavanje tog sistema i nalaženje njegovih korena, ako postoje. Polinom od n promenljivih:

$$f = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}_0} c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} \tag{2}$$

smatramo za konačnu sumu n-torki $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ iz $\mathbb{A}_0 \subset \mathbb{N}_0^n$ ($\mathbb{A}_0$ - *konačan skup*), gde $c_\alpha \neq 0$. Proizvode $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$ nazivamo *monomima*, a sabirke $c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$ *termovima polinoma*. Na beskonačnom skupu monoma mi ćemo koristiti leksikografski poredak:
$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} \succ_{lex} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} ... x_n^{\beta_n}$ akko $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \succ_{lex} (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$
Sada, polinom (2) možemo urediti po leksikografskom poretku i prvi term u sumi f ćemo definisati kao *vodeći term* i označavati ga sa $LT(f)$.

2 Metode istraživanja

2.1 Algotitam deljenja

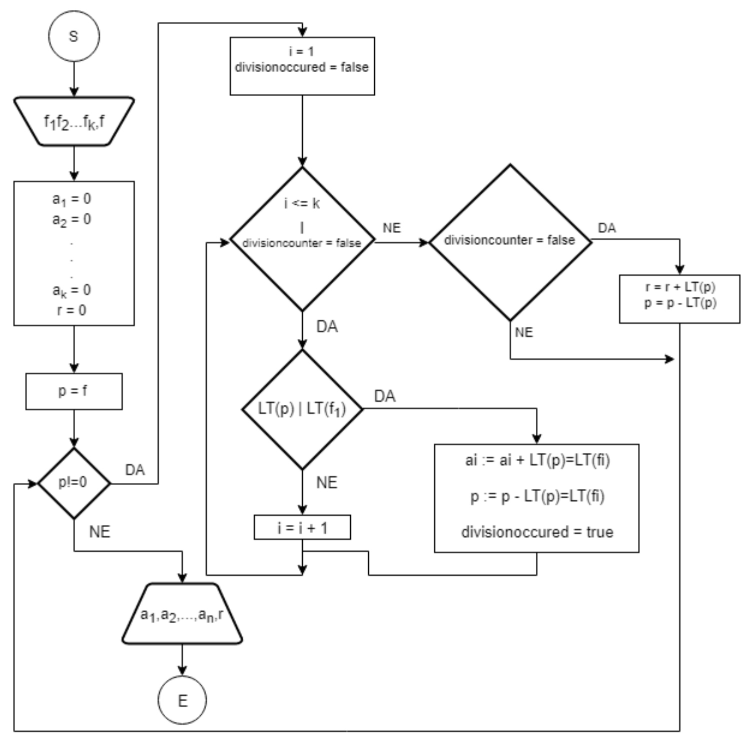
U prstenu polinoma $\mathbb{C}[x_1, x_2, ..., x_n]$ koristimo algoritam deljenja prikazan dijagramom toka.

Nakon izvršavanja algoritma, svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, ..., x_n]$ može biti predstavljen na sledeći način:

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + ... + a_m f_m + r,$$

gde je $a_i, r \in \mathbb{C}[x_1, x_2, ..., x_n]$, za i ={1,2,3,...,m}, i $r = 0$ ili je r linearna kombinacija svih monoma iz $\mathbb{C}$, tako da nikoji od tih monoma nije deljiv ni sa jednim $LT(f_1), LT(f_2), ..., LT(f_m)$.

Polinom $r = REM(f, F)$ nazivamo ostatkom od f nakon deljenja sa m polinoma iz F, poređanih u leksikografski poredak $\succ_{lex}$. Primetimo da mora da važi $LT(f) \succ_{lex} LT(r)$.



Početna m-torka polinoma $F = (f_1, f_2, f_3, ..., f_m)$ određuje *ideal*:

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^{m} h_i f_i : h_1, h_2, ..., h_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, ..., x_n] \right\}$$

Polinomi $f_1, f_2, f_3, ..., f_m$ su generatori ideala $I = \langle f_1, f_2, f_3, ..., f_m \rangle$ u polinomijalnom prstenu $\mathbb{C}[x_1, x_2, ..., x_n]$. Za ideal $I = \langle f_1, f_2, f_3, ..., f_m \rangle$ definišemo i ideal vodećih termova:

$$\langle LT(I) \rangle = \langle \{LT(f) | f \in I\} \rangle.$$

Za svaki takav ideal važi:

$$\langle \{LT(f_1), LT(f_2), ..., LT(f_m)\} \rangle \subseteq \langle LT(I) \rangle.$$

Konačan generisan skup $G = \{g_1, g_2, ..., g_k\}$ ideala $I = \langle f_1, f_2, f_3, ..., f_m \rangle$, $(k \geq m,)$ se naziva *Grebnerova baza* za I ako važi:

$$\langle \{LT(g_1), LT(g_2), ..., LT(g_k)\} \rangle = \langle LT(I) \rangle.$$

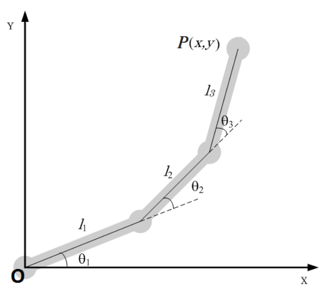
Za svaku permutaciju k-točlane Grebnerove baze $G = \{g_1, g_2, ..., g_k\}$, ostatak $r = REM(f, G)$ je jedinstveno određen.
Grebnerova baza $G = \{g_1, g_2, g_3, ..., g_k\}$ sastoji se od:

$$\begin{gathered} g_1(x_1, x_2, x_3, ...x_n) \\ g_2(x_1, x_2, x_3, ...x_n) \\ \vdots \\ g_i(x_2, x_3, ...x_n) \\ \vdots \\ g_k(x_n) \end{gathered} \tag{3}$$

Odakle lako možemo da odredimo rešenja početnog sistema jednačina.

2.2 Robotska ruka

Kako bi robotska ruka sa tri zgloba ,,stigla" od tačke O (početak robotske ruke) do tačke P (tačka na kraju robotske ruke), moguće je da zauzme beskonačno mnogo različitih položaja. Transformisanje položaja tačke O u tačku P nizom translacija i rotacija možemo definisati sistem polinomskih jednačina koje Grebnerove baze uprošćavaju dovoljno da se sistem može rešiti.



Kako bi na osnovu rezultujuće matrice transformacija došli do neophodnih uglova $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, uvodimo smenu:

$$\begin{array}{lll} cos(\theta_1) = c_1 & cos(\theta_2) = c_2 & cos(\theta_3) = c_3 \\ sin(\theta_1) = s_1 & sin(\theta_2) = s_2 & sin(\theta_3) = s_3 \end{array}$$

Nakon korišćenja standardnih matrica za translaciju i rotaciju u 2D prostoru, imamo matricu M koja predstavlja kompoziciju operacija rotiranja i transliranja:

$$M_i = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & c_i l_i \\ s_i & c_i & s_i l_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Rezultati

Pošto imamo tri zgloba, koordinate ciljne tačke $P(x, y)$ ćemo dobiti množenjem matrice kompozicije transformacija za svaki segment M sa r_0, gde r_0 predstavlja koordinate robotske ruke dok leži u koordinatnom početku.

$$M = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$$
$$\overrightarrow{r} = M \cdot \overrightarrow{r_0} =$$
$$\begin{bmatrix} (c_1c_2 - s_1s_2)c_3l_3 - (c_1s_2 + c_2s_1)s_3l_3 + c_1c_2l_2 - s_1s_2l_2 + c_1l_1 \\ (c_1s_2 + c_2s_1)c_3l_3 + (c_1c_2 - s_1s_2)s_3l_3 + c_1s_2l_2 + s_1c_2l_2 + s_1l_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sada možemo da postavimo sistem jednačina:

$$f_1 = (c_1c_2 - s_1s_2)c_3l_3 - (c_1s_2 + c_2s_1)s_3l_3 + c_1c_2l_2 - s_1s_2l_2 + c_1l_1 = x$$
$$f_2 = (c_1s_2 + c_2s_1)c_3l_3 + (c_1c_2 - s_1s_2)s_3l_3 + c_1s_2l_2 + s_1c_2l_2 + s_1l_1 = y$$
$$f_3 = c_1^2 + s_1^2 - 1 = 0$$
$$f_4 = c_2^2 + s_2^2 - 1 = 0$$
$$f_5 = c_3^2 + s_3^2 - 1 = 0$$

Imamo sistem od 5 jednačina sa 6 nepoznatih (poznate su nam l_i, i željene koordinate x i y). Upotrebom Grebnerovih baza dolazimo do jednostavnijeg sistema, pogodnog za rešavanje.

4 Zaključak

U zavisnosti od monomijalnog poretka koji primenimo i redosleda promenljivih koji usvojimo (npr. $c_1 > s_1 > c_2 > s_2 > c_3 > s_3$) dobićemo različite Grebnerove baze od kojih neke mogu biti složenije, a neke prostije za rešavanje. Simbolička rešenja ove baze za 3 zgloba se generalno kreću u veličini od oko nekoliko desetina strana kucanog teksta. Robotske ruke se obično kreću između manjeg ili većeg broja predefinisanih položaja i zahvaljujući tome, nama je dovoljno da dođemo do numeričkih rešenja za neke unapred definisane tačke O i $P(x, y)$ i dužine segmenata robotske ruke l_1, l_2, l_3.

5 Reference

[1] Krister Forsman, *The Hitch Hiker's Guide to Gröber Bases: commutative algebra for amateurs,*
Linköping University, Sweden, 1992.

[2] André Heck *A Bird's-Eye View of Gröbner Bases*, CAN Expertise Center, Amsterdam, 1996.

[3] Matej Mencinger, *On Groebner Bases and Their Use in Solving Some Practical Problems*, Horizon Research Publishing, Slovenia, 2013.